



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Beregning af ikke-stationære strømninger i vandløb

Schaarup-Jensen, Kjeld

*Publication date:*  
2003

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Schaarup-Jensen, K. (2003). *Beregning af ikke-stationære strømninger i vandløb*. Aalborg Universitet, Inst. for Vand, Jord og Miljøteknik, Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning.

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Aalborg Universitet – Livslang Uddannelse – 2003

HYDRAULIK 2003

# **BEREGNING AF IKKE-STATIONÆRE STRØMNINGER I VANDLØB**

af

**Kjeld Schaarup-Jensen**

Lektor, akademiingeniør  
Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning  
Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik  
Aalborg Universitet.



# Indhold

<b>1</b>	<b>Indledning</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Det teoretiske grundlag</b>	<b>6</b>
2.1	Kontinuitetsligningen. . . . .	7
2.2	Impulsligningen . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Den numeriske beregningsmetode</b>	<b>16</b>
3.1	Kontinuitetsligningen . . . . .	18
3.2	Impulsligningen . . . . .	19
3.3	Løsningsmetode . . . . .	20
3.4	Afslutning . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Litteraturliste</b>	<b>25</b>





# 1 Indledning

Nærværende noter er oprindelig skrevet i september 1996 til brug i et efteruddannelseskursus i *Vandløbshydraulik* på Ferskvandscentret i Silkeborg.

I forbindelse med kurset *Hydraulik 2003* på Livslang Uddannelse, 2003, har det fra starten været meningen, at ikke-stationær strømning – bl.a. ikke-stationær strømning i vandløb og floder – skulle være ét af emnerne i dette kursus.

Hvad angår det teoretiske grundlag for beregningen af disse strømninger – herunder også de anvendte numeriske beregningsmetoder – mener jeg, at disse noter kunne være nyttige for de kursusdeltagere, der gerne vil fordybe sig i disse emner.

Jeg har derfor kikket noterne igennem og rettet dem lidt til, så de i deres nuværende form forhåbentlig kan leve op til kursets titel.

Til de kursusdeltagere, der ikke tidligere har beskæftiget sig med det teoretiske grundlag for beregning af vands strømning, skal det nævnes, at beskrivelsen nogle steder er meget detaljeret, medens der andre steder er benyttet en næsten populær-videnskabelig beskrivelse, for at gøre en korrekt, men desværre meget lang, teoretisk udredning kort.

Det er mit håb, at noterne selv med denne forskelligartethed i detaljeringsniveauet alligevel fremstår i en let læselig og forståelig form – som også appellerer til kursusdeltagere, for hvem emnet ikke er helt nyt.

Aalborg, august 2003.

Kjeld Schaarup-Jensen.



## 2 Det teoretiske grundlag

For ikke at gøre tingene mere komplicerede end nødvendigt, vil vi i dette afsnit betragte et et-strengt og konvergerende vandløbssystem, dvs. et vandløbssystem med kun ét hovedløb, hvortil vandet strømmer – dels via en række sidetilløb til hovedløbet som punktformede tilløb – dels via grundvandsmagasinerne som en diffus naturlig lateral tilstrømning i hoved- og sidetilløbenes længderetning – jf. figur 1. Vi vil altså i denne sammenhæng se bort fra divergerende vandløbssystemer, karakteristiske ved at hovedløbet deler sig i flere næsten parallelle løb, der senere kan have sammenløb igen eller selvstændige udløb. Dette skal ikke forstås sådan, at beregning af ikke-stationære afstrømningsforløb i sidstnævnte vandløbssystemer ikke kan gennemføres, for det *kan* de faktisk i nogle hydrodynamiske modeller – som f.eks. *MIKE 11* fra Dansk Hydraulisk Institut – men det kræver en ret kompliceret modifikation af de beregningsmetoder, der benyttes i relation til førstnævnte vandløbssystemer.

Endvidere vil vi for forenklingens skyld forudsætte, at strømningen under hele sit forløb foregår som en strømning med frit vandspejl, altså at der på strækninger, hvor vandløbet måtte være rørlagt, på intet tidspunkt under afstrømningsforløbet sker det, at vi får fuldtløbende rør på disse strækninger. Hydraulikere karakteriserer en sådan strømning i fuldtløbende rør som en trykstrømning, idet røret – når det er fuldtløbende – er udsat for et indvendigt tryk fra det strømmende vand. Det teoretiske grundlag for beregning af sådanne trykstrømninger afviger i nogen grad fra det teoretiske grundlag for beregning af ikke-stationære strømninger med frit vandspejl, så vi vil koncentrere os om sidstnævnte, bl.a. af tidsmæssige grunde.

Set ud fra et "vandløbshydraulisk" synspunkt begrænser disse forudsætninger naturligvis den praktiske anvendelighed af de efterfølgende betragtninger, men læseren bedes bemærke, at forudsætningerne er introduceret for at det efterfølgende teoretiske grundlag for beregning af ikke-stationære strømninger i vandløb (og kanaler) udelukkende kan koncentreres om det helt fundamentale – helt befriet for unødigt komplicerede detailforhold. Læsere der senere måtte få brug for at vide noget om "loop'ede" vandløb og ikke-stationær trykstrømning opfordres til at opsøge den ret omfangsrige speciallitteratur om begge disse emner – se litteraturlisten, kap. 4.

Grundlæggende er det teoretiske grundlag for beregning af ikke-stationær strømninger baseret på 2 fundamentale fysiske love, som vi vil kræve, at den efterfølgende „matematiske model“ af strømningen skal opfylde, nemlig:

- loven om massens konstans,
- Newton's 2. lov.

Loven om massens konstans vil vi formulere i en såkaldt kontinuitetsligning, medens Newton's 2. lov efterfølgende vil blive formuleret i det, der blandt hydraulikere kaldes impuls-ligningen.

Før vi påbegynder opstillingen af disse 2 ligninger, er det nødvendigt at forudsætte følgende:

1. vandet er usammentrykkeligt og homogent, dvs. uden væsentlige massetæthedsforskelle,
2. vandløbets bundhældninger er små overalt,
3. længden af de "bølger", som strømmingen består af, er store i forhold til de i bølgerne forekommende vanddybder,
4. tværsnitsændringer på langs af vandløbet sker gradvist og ikke momentant
5. indsivning fra grundvandsmagasinerne sker vinkelret på vandløbet.

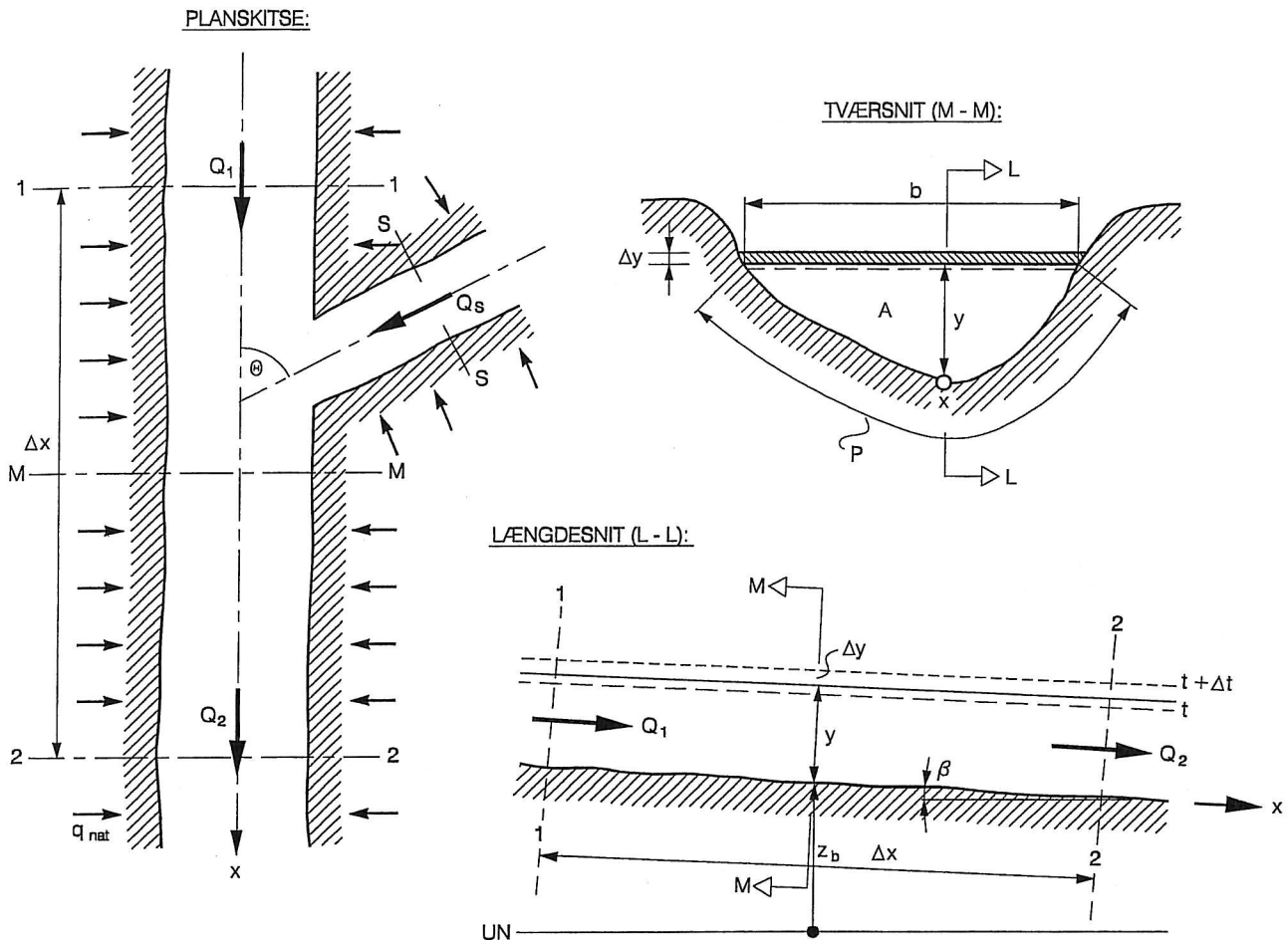
Den første forudsætning udelukker, at den efterfølgende "vandløbsmodel" kan anvendes på en som regel kort strækning (5–10 km) omkring et vandløbs udløb i et saltvandområde. På en sådan strækning er det nødvendigt at basere sig på teorien om lagdelte væskers strømning. Den 3. forudsætning tjener det formål at sikre, at krumningen på strømlinierne til ethvert tidspunkt er så lille, at vi – uden at begå nogen nævneværdige fejl – kan regne strømlinierne for at være parallelle med vandløbsbunden. Dette betyder efterfølgende, at vi kan tillade os, at negligere de lodrette accelerationer i strømmingen, og dermed at vi over snit indlagt vinkelret på bunden kan regne med, at trykfordelingen er hydrostatisk. Hvad dette egentlig betyder, vil vi komme nærmere ind på senere. 4. forudsætning udelukker, at vandløbstværsnittet pludselig ændres radikalt over en kort strækning. Da dette ofte er tilfældet i de fleste danske vandløb må vi nødvendigvis indregne effekten af en sådan pludselig tværsnitsændring – et pludseligt energitab (enkelttab) – i friktionstabet via en kunstig regulering af friktionstallet (Manningtallet). Forudsætningen bevirker altså, at vi i vores geometribeskrivelse af vandløbet kan springe disse pludselige tværsnitsændringer over mod at indkalkulere effekten af sådanne i friktionstabet. Vandløbsgeometrien bliver derfor "udramatisk" med glidende overgange mellem tværsnittene, der generelt selvfølgelig bliver større og større jo nærmere vi kommer udløbet. 3. og 4. forudsætning tilsammen gør det faktisk muligt, at beskrive strømmingen i vandløbet som en (i hovedsagen) én-dimensional strømning.

## 2.1 Kontinuitetsligningen.

I et vilkårligt vandløbssystem, der overholder de ovenfor beskrevne forudsætninger, betragter vi nu det på figur 1 skitserede udsnit, der er lidt specielt i den forstand, at hovedløbet får vand fra et sidetilløb ca. midt på strækningen. Vinklen mellem hovedløb og sidetilløb er  $\theta$ .

På dette udsnit af vandløbssystemet vil vi nu til 2 forskellige tidspunkter – karakteriseret ved henholdsvis tiden  $t$  og tiden  $t + \Delta t$  – betragte vandvolumenet mellem snittene 1, S og 2. Den indbyrdes afstand mellem snit 1 og 2 er  $\Delta x$ , medes snit S regnes placeret tæt på hovedløbet, mere tæt på hovedløbet end det fremgår af figur 1, der på dette punkt er fortegnet.

Hvis vandvolumenet mellem disse 3 snit er forskelligt til de 2 tidspunkter, er forklaringen naturligvis den simple, at strømmingen i tidsintervallet  $\Delta t$  har transporteret en vandmængde ind gennem snit 1 og S, der – suppleret med den naturlige laterale indsivning over  $\Delta x$  – er forskellig fra den vandmængde, der er udstrømmet gennem snit 2. Tilvæk-



Figur 1: Planskitte, længde- og tværsnit på den betragtede vandløbsstrækning.

sten i vandvolumenet mellem de 3 snit må derfor – hvis (vand)massen skal være konstant – være identisk med forskellen mellem det ind- og udstrømmede vandvolumen gennem omtalte 3 snit. Bemærk at vi – selv om vi grundlæggende arbejder med loven om massens konstans – faktisk argumenterer for at 2 vandvolumener er identiske; forklaringen herpå er, at ovenstående 1. forudsætning sikrer, at vandets massetæthed er konstant, hvorved dette netop bliver legalt. Vandets massetæthed vil vi iøvrigt i det følgende benævne  $\rho$  ( $= 1000 \text{ kg/m}^3$ ).

Tilvæksten i vandvolumenet mellem de 3 snit kan vi – jf. figur 1 – let udregne som:

$$\Delta Vol = \Delta A \cdot \Delta x = b \cdot \Delta y \cdot \Delta x \quad (1)$$

hvor  $\Delta A = b \cdot \Delta y$  = ændringen af tværsnitsarealet ( $\text{m}^2$ ) i tidsrummet  $\Delta t$ ,  
 $b$  = vandspejlsbredden (m), og  
 $\Delta y$  = ændringen i tidsrummet  $\Delta t$  af middelvanddybden (m) mellem snit 1 og 2.

Bemærk at vi i (1) har negligeret en eventuel tilvækst i vandvolumenet i sidetilløbet, hvilket skyldes at denne tilvækst er forsvindende lille ift. tilvæksten i hovedløbet, da snit S som tidligere omtalt regnes placeret tæt på hovedløbet.

Hvis vi introducerer symbolet  $V$  (m/s) for strømningens middelhastighed over et vilkårligt snit vinkelret på ledningsbunden, vil vi have, at det vandvolumen, der gennemstrømmer et sådant snit i tidsrummet  $\Delta t$  er givet ved  $V \cdot \Delta t \cdot A$ . Herved bliver forskellen mellem det ind- og udstrømmede vandvolumen gennem henholdsvis snit 1, S og 2:

$$V_1 \cdot \Delta t \cdot A_1 + V_S \cdot \Delta t \cdot A_S - V_2 \cdot \Delta t \cdot A_2 = (Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t + Q_S \cdot \Delta t$$

idet vi har introduceret vandføringen  $Q = V \cdot A$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) som et mål for, hvor mange volumenenheder vand ( $\text{m}^3$ ), der passerer et sådant tværsnit pr. tidsenhed (sek=s).

Hertil kommer den naturlige laterale indsigvning fra grundvandsmagasinerne over strækningen  $\Delta x$ . Hvis vi for denne introducerer  $q_{nat}$  = indsigvingsvandføringen pr. meter i vandløbets længderetning ( $\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ ), får vi resulterende, at forskellen mellem ind- og udstrømmet vandvolumen på strækningen  $\Delta x$  er:

$$(Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t + Q_S \cdot \Delta t + q_{nat} \cdot \Delta x \cdot \Delta t \quad (2)$$

Da volumenerne givet ved (1) og (2) som nævnt skal være identiske, får vi:

$$(Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t + Q_S \cdot \Delta t + q_{nat} \cdot \Delta x \cdot \Delta t = \Delta y \cdot b \cdot \Delta x \Leftrightarrow$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{\Delta x} + b \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{Q_S}{\Delta x} + q_{nat} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} + b \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} = q \quad (3a)$$

idet vi har indført  $\Delta Q = Q_2 - Q_1$  og  $q = \frac{Q_S}{\Delta x} + q_{nat} = q_S + q_{nat}$ . Med hensyn til vandføringen i sidetilløbet,  $Q_S$ , har vi altså fordelt denne ud over  $\Delta x$  som en lateral tilstrømning på linie med  $q_{nat}$ .  $q$  betegner derfor den totale laterale tilstrømning, og på alle delstrækninger uden sidetilløb vil der derfor gælde, at  $q = q_{nat}$ .

Benytter vi os af følgende matematiske definitioner:

$$\left( \frac{\Delta Q}{\Delta x} \right)_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{og} \quad \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

kan (3a) omskrives til:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = q \quad (3b)$$

der altså er gyldig, når  $\Delta x \rightarrow 0$  og  $\Delta t \rightarrow 0$  samtidigt.

(3a) og (3b) kaldes kontinuitetsligningen på henholdsvis differens- og differentialform.

## 2.2 Impulsligningen

Herefter vil vi - som nævnt ovenfor - anvende Newton's 2. lov på strømmingen, eller mere præcist, på et veldefineret vandlegeme, der deltager i strømmingen. Her vælger vi, at betragte det vandlegeme, der til tiden  $t$  befinder sig mellem snit 1 og S og snit 2.

Først lidt om Newton's 2. lov, der som bekendt udtrykker, at den samlede ydre kraft, der virker på et legeme i bevægelse, er lig med legemets masse multipliceret med legemets acceleration:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

hvor  $\sum \vec{F}$  = den samlede ydre kraft (vektor), der virker på vandlegemet,  $m$  = legemets masse, og  $\vec{a}$  = legemets acceleration (vektor).

Denne ligning vil vi nu omskrive, idet vi samtidig projicerer ligningen ind på x-aksen (strømretningen):

$$d(m \cdot v_x) = (\sum F_x) \cdot dt$$

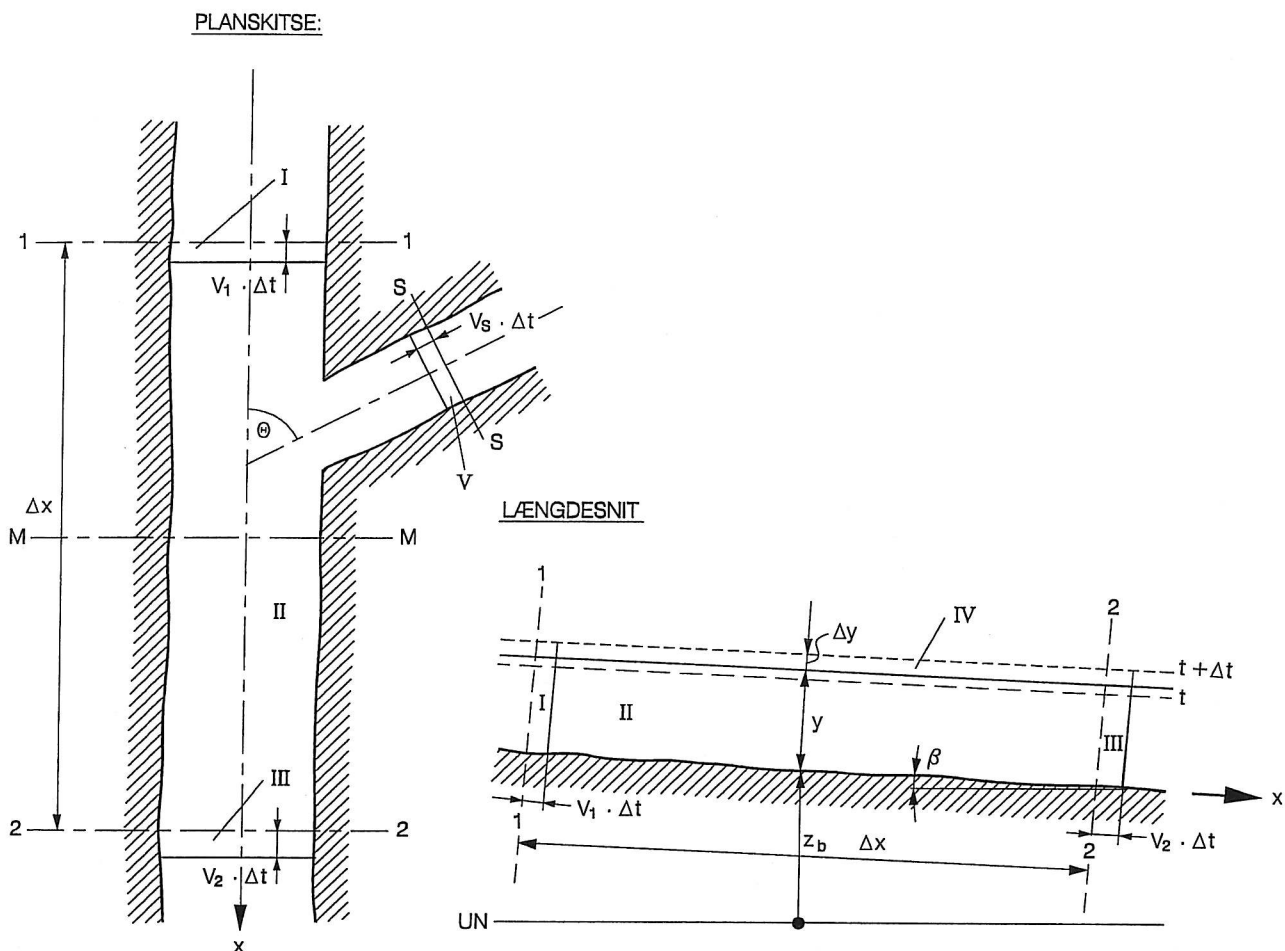
Idet det erindres, at der her er tale om x-komponenten af en ligning, der har 2 andre (i denne sammenhæng uinteressante) komponenter, så udtrykker Newton's 2. lov skrevet på denne form, at legemets tilvækst i bevægelsesmængde er identisk med impulsen af den totale ydre kraft, der virker på legemet. Denne ligning er, som det fremgår af selve ligningen kun gyldig over et uendelig lille tidsrum  $dt$ . På trods af dette vil vi regne følgende ligning gyldig over tidsrummet  $\Delta t$ , der ikke er slet så lille som  $dt$ , men selvsagt bør være rimelig lille:

$$\Delta(m \cdot v_x) = (\sum F_x) \cdot \Delta t \quad (4)$$

I denne ligning vil vi nu først udregne legemets tilvækst i bevægelsesmængde, eller bevægelsesmængde-ændringen, således som denne er formuleret på ligningens „venstre side“. Vi betragter derfor legemets bevægelse i løbet af tidsrummet  $\Delta t$ . I dette tidsrum vil vandpartiklerne, der til tiden  $t$  befinder sig i snit 2 have bevæget sig stykket  $v_2 \cdot \Delta t$  i strømretningen. Her betegner  $v_2$  den hastighed, som den enkelte vandpartikel bevæger sig i strømmingen med. Hvis vi nu forudsætter, at alle vandpartiklerne i snit 2 bevæger sig med stort set samme hastighed, kan vi tilnærmet beskrive alle partiklernes flytning ved  $V_2 \cdot \Delta t$ , idet vi som fællesnævner for vandpartiklernes hastighed benytter strømmingens middelhastighed over snit 2. Denne tilnærmelse er faktisk rimelig god, idet det ved laboriemålinger har vist sig, at strømhastighederne varierer meget lidt over et snit som det betragtede. Tilsvarende regner vi med at partiklerne i snit 1 og S bevæger sig henholdsvis  $V_1 \cdot \Delta t$  og  $V_S \cdot \Delta t$  i samme tidsrum.

Vi når derfor frem til, at det betragtede vandlegemes position til tiderne  $t$  og  $t + \Delta t$  vil være givet som skitseret på figur 2.





Figur 2: Vandlegemets position til tiden  $t$  og tiden  $t + \Delta t$ .

Heraf fremgår det, at bevægelsesmængde-ændringen kan udregnes på følgende måde:

$$\begin{aligned}
 \Delta(m \cdot V_x) &= (m \cdot V)^{t+\Delta t} - (m \cdot V)^t \\
 &= (m \cdot V)_{III} + (m \cdot V)_{II}^{t+\Delta t} + (m \cdot V)_{IV} \\
 &\quad - (m \cdot V)_{II}^t - (m \cdot V)_I - (m \cdot V)_V \cdot \cos \theta \\
 &= \rho \cdot V_2 \cdot \Delta t \cdot A_2 \cdot V_2 + \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot V_{II}^{t+\Delta t} + \rho \cdot b \cdot \Delta y \cdot \Delta x \cdot V_{II} \\
 &\quad - \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot V_{II}^t - \rho \cdot V_1 \cdot \Delta t \cdot A_1 \cdot V_1 - \rho \cdot V_S \cdot \Delta t \cdot A_S \cdot V_S \cdot \cos \theta
 \end{aligned}$$

idet f.eks.  $(m \cdot V)_{III}$  findes som massen i område III,  $\rho \cdot V_2 \cdot \Delta t \cdot A_2$ , multipliceret med hastigheden  $V_2 \cdot \cos \theta$  på bevægelsesmængde-leddet hørende til sidetilløbet stammer fra, at vi som bekendt har projiceret på x-aksen. I denne forbindelse har vi jf. forudsætning nr. 5 udeladt eventuelle bevægelsesmængdeændringer stammende fra  $q_{nat}$ , hvad man naturligvis

godt kan uden omtalte forudsætning, da strømhastighederne hørende til denne indsvivning er helt ubetydelige ift. til de strømhastigheder, der forekommer i selve vandløbet.

Dette udtryk for bevægelsesmængde-ændringen kan vi reducere yderligere på følgende måde:

$$\begin{aligned}\Delta(m \cdot V_x) &= \rho \cdot \Delta t \cdot (V_2^2 \cdot A_2 - V_1^2 \cdot A_1) + \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \Delta V + \rho \cdot \Delta A \cdot \Delta x \cdot V \\ &\quad - \rho \cdot \Delta t \cdot V_S^2 \cdot A_S \cdot \cos \theta \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(m \cdot V_x) &= \rho \cdot \Delta t \cdot \left( \frac{Q_2^2}{A_2} - \frac{Q_1^2}{A_1} \right) + \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta(V \cdot A) \\ &\quad - \rho \cdot \Delta t \cdot Q_S \cdot V_S \cdot \cos \theta \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Delta(m \cdot V_x) = \rho \cdot \Delta t \cdot \Delta \left( \frac{Q^2}{A} \right) + \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta Q - \rho \cdot \Delta t \cdot Q_S \cdot V_S \cdot \cos \theta \quad (5)$$

når vi undervejs indfører:

$$\Delta V = V^{t+\Delta t} - V^t, \Delta A = b \cdot \Delta y, Q = V \cdot A, \text{ og } \Delta(Q^2/A) = [(Q_2^2/A_2) - (Q_1^2/A_1)].$$

(5) kan vi nu lade erstatte venstresiden i (4), men før vi gør dette, vil vi først udregne samme lignings højreside. Når vi i denne forbindelse skal udregne  $\sum F_x$  (= den totale ydre kraft, der virker på det betragtede vandlegeme), gøres dette lettest ved at betragte de enkelte delbidrag til  $\sum F_x$ . Disse delbidrag hidrører, jf. figur 3, fra:

- trykkræfter virkende vinkelret ind på legemets overflade,
- friktionskræfter, ligeledes virkende på legemets overflade, men parallelt med denne, samt naturligvis
- tyngdekraften.

I og med at trykkræfterne overalt virker vinkelret ind på legemets overflade og vi i  $\sum F_x$  kun skal medregne kraftbidrag i x-aksens retning, bliver de eneste interessante trykkræfter i denne forbindelse dem, der ækvivalerer den trykfordeling, der virker over snittene 1 og 2. Den tidligere introducerede forudsætning nr. 3, har til formål at sikre, at disse trykfordelinger er hydrostatiske, hvilket – jf. figur 3 – vil sige, at begge trykfordelinger varierer retlinet over begge snit. Karakteristisk i denne forbindelse er, at vandtrykket er lig med nul i vandoverfladen, når vi indfører en konvention om, at vi vil regne vandtrykket som overtryk over barometertrykket. De enkeltkræfter, der ækvivalerer omtalte 2 hydrostatiske trykfordelinger, vil vi i det følgende benævne henholdsvis  $P_1$  og  $P_2$ .

Med hensyn til friktionskræfterne, så vil det eneste sted disse kræfter bidrager til  $\sum F_x$  være mellem vandløbsbund og det forbistrømmende vandlegeme. Disse kræfter, som vi efterfølgende vil benævne  $T$ , forsøger at modvirke vandlegemets bevægelse, og virker derfor i x-aksens negative retning.

Med hensyn til tyngdekraften, så virker denne, som vist på figur 3, naturligvis i lodret



Herefter indsætter vi nu (5) og (7) i (4), hvorefter vi dividerer med  $\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\Delta \left( \frac{Q^2}{A} \right)}{\Delta x} = -g \cdot A \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\tau_0 \cdot P}{\rho} + g \cdot A \cdot I_0 + q_S \cdot V_S \cdot \cos \theta \quad (8)$$

For forskydningsspændingen  $\tau_0$  i (8) vil der gælde:

$$\tau_0 = \gamma \cdot R \cdot I \quad (9)$$

forudsat, at strømmingen er stationær og énsformig. Sidstnævnte begreb benyttes i forhold til strømninger, der ikke ændres i strømretningen. I (9) betegner  $\gamma = \rho \cdot g$  specifik tyngde,  $R = A/P$  hydraulisk radius, og  $I$  energiliniegradienten (energitabet i strømmingen pr. længdeénhed i strømretningen). Selv om (9) som nævnt kun er gyldig for stationær og énsformig strømning, har praksis vist, at (9) indsat i (8) fører frem til fornuftige resultater. Vi indsætter derfor også her (9) i (8), der herefter resulterende kommer til at lyde:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\Delta \left( \frac{Q^2}{A} \right)}{\Delta x} + g \cdot A \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = g \cdot A \cdot I_0 - g \cdot A \cdot I + q_S \cdot V_S \cdot \cos \theta \quad (10a)$$

(10a) er impulslikningen på differensform. Ligesom det var tilfældet med kontinuitetslikningen, kan vi ved at lade  $\Delta x \rightarrow 0$  og  $\Delta t \rightarrow 0$  samtidigt ud fra (10a) udlede impulslikningen på differentialform:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = g \cdot A \cdot I_0 - g \cdot A \cdot I + q_S \cdot V_S \cdot \cos \theta \quad (10b)$$

		<u>Kinematisk bølgeteori</u>
	<u>Diffusiv bølgeteori</u>	
<u>Fuld dynamisk bølgeteori</u>		

De parvis sammenhørende ligninger, (3a) + (10a) og (3b) + (10b) kaldes *Saint Venants ligninger* på henholdsvis differens- og differentialform.

Da de enkelte led i impulslikningen, (10b), i en konkret strømmingssituation vil optræde med forskellig „styrke“ - dvs. at leddene ved en indbyrdes relativ sammenligning kvantitativt set har forskellig størrelse - kan man i overensstemmelse hermed vælge at negligere ét eller flere led i (10b).

Vælger man - som antydnet ovenfor - f.eks. at se bort fra de 2 første led på ligningens venstreside (accelerationsled) siges (3b) og den reducerede udgave af (10b) tilsammen at udgøre det teoretiske grundlag for beregning af en såkaldt *diffusiv bølge*. Negligeres alle 3 led på venstresiden af (10b) siges denne reducerede ligning sammen med (3b) at udgøre det teoretiske grundlag for beregning af en *kinematisk bølge*. Medtages alle leddene

i (10b) udgør ligningerne tilsammen det teoretiske grundlag for beregning af en *fuldt dynamisk bølge*. Disse 3 bølgetyper blev oprindeligt introduceret ift. en impulslikning, der ikke indeholdt det sidste led på ligningens højreside, hvilket jo er tilfældet, hvis der med rimelighed gælder, at  $\theta = 90^\circ$ .

Vi skal ikke her komme nærmere ind på under hvilke omstændigheder kinematisk- og diffusiv bølgeteori fører frem til brugbare beregningsresultater. Vi nøjes med blot at omtale muligheden for at negligere led i impulslikningen. Interesserede læsere kan eventuelt forfølge dette emne ved at fordybe sig i speciallitteraturen - se kap. 4.

*I det følgende vil vi udelukkende basere os på fuld dynamisk bølgeteori.* Samtidig vil vi forenkle det efterfølgende ved at forudsætte, at alle sidetilløb har samløb med hovedløbet under en vinkel på  $90^\circ$ . Dette er igen udelukkende gjort for ikke at komplicere tingene mere end allerhøjest nødvendigt. De fleste hydrodynamiske modeller, bl.a. *MIKE 11*, kan naturligvis håndtere sidetilløb med vilkårlig værdi af  $\theta$ .

Dette vil sige, at det er ovenstående gengivelse af (10b) (minus sidste led på ligningens højreside), der tilsammen med (3b) i det følgende afsnit vil blive benyttet som grundlag for opstilling af en numerisk beregningsmetode, der gør det muligt at simulere ikke-stationær strømning med frit vandspejl i vandløb og dermed selvfølgelig også i kanaler.

### 3 Den numeriske beregningsmetode

Som det fremgår af forrige kapitel udgør *Saint Venant ligningerne* det teoretiske grundlag for beregning af ikke-stationære strømninger i vandløb og kanaler:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = q \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = g \cdot A \cdot I_0 - g \cdot A \cdot I \quad (12)$$

(11) og (12) er det matematikere kalder 2 sammenhørende hyperbolske partielle differentiaalligninger, hvor impuls-ligningen, (12), endda er ikke-lineær, bl.a. pga. det kvadratiske andet led på ligningens venstreside. Ikke-lineariteten bliver endnu mere udtalt, når vi, sædvanen tro, beregner energiliniegradienten,  $I$ , vha. Manningformlen:

$$Q = M \cdot R^{2/3} \cdot A \cdot I^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{Q^2}{M^2 \cdot R^{4/3} \cdot A^2} \quad (13)$$

Praksis har vist, at (13) ved indsættelse i (12) fører frem til brugbare resultater, selv om (13) ligesom det er tilfældet med (9) - kun er gyldig for stationær og énsformig strømning.

Ved indsættelse af (13) i (12) får vi:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = g \cdot A \cdot I_0 - g \cdot A \cdot \frac{Q \cdot |Q|}{M^2 \cdot R^{4/3} \cdot A^2} \quad (14)$$

hvor det ene  $Q$  i ligningens sidste led indgår med sin numeriske værdi for at sikre, at samme led altid optræder med det korrekte fortegn - også hvis vandføringen  $Q$  skulle gå hen og blive negativ. Sagt på en lidt anden måde, så sikrer dette numeriske tegn, at forskydningsspændingen  $\tau_0$  - se udledningen af (6) - altid er rettet mod strømretningen.

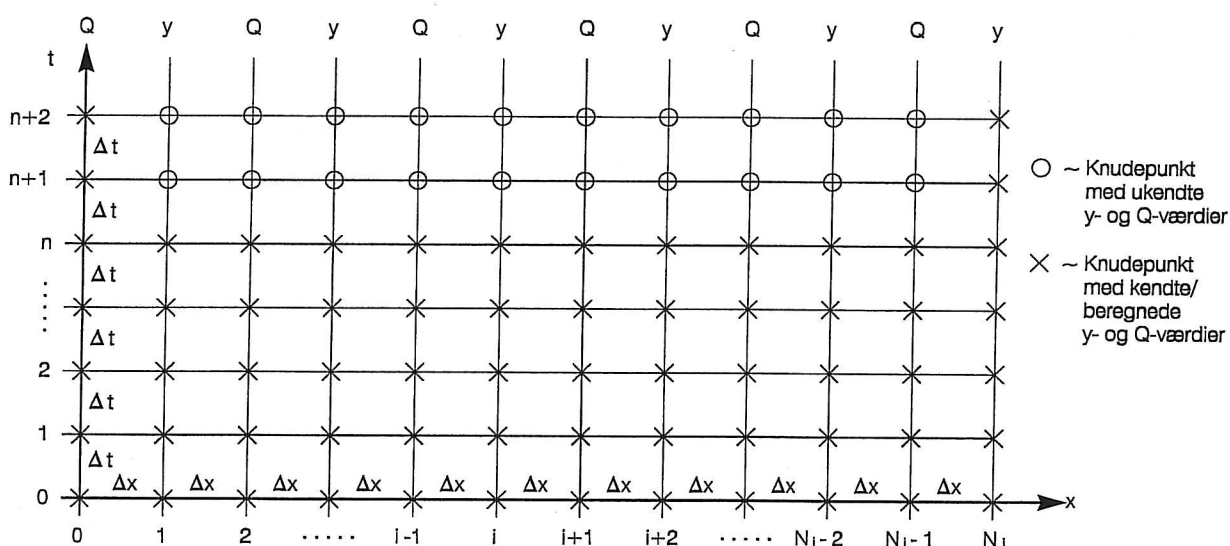
En analytisk løsning af (11) og (14) ville bestå i, at funktionsudtrykkene  $y = y(x, t)$  og  $Q = Q(x, t)$  ville kunne bestemmes, altså at såvel vanddybdens som vandføringen variation med stedet og tiden ville kunne udregnes på grundlag af analytiske udtryk. Da (14) er ikke-lineær, hvad  $Q$  angår, kan sådanne analytiske løsninger ikke bestemmes, hvorfor vi er tvunget ud i, at skulle løse ligningerne vha. numeriske metoder.

Af denne grund vil vi tage vores udgangspunkt i (11) og (14) opskrevet på differensform:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} + b \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} = q \quad (15)$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\Delta \left( \frac{Q^2}{A} \right)}{\Delta x} + g \cdot A \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = g \cdot A \cdot I_0 - g \cdot A \cdot \frac{Q \cdot |Q|}{M^2 \cdot R^{4/3} \cdot A^2} \quad (16)$$

Før vi kommer nærmere ind på, hvorledes de enkelte differensled i disse ligninger i dette tilfælde bliver udregnet, må vi gøre os klart, at det i princippet er funktionerne:  $y = y(x, t)$  og  $Q = Q(x, t)$ , vi ønsker at beregne, men som det vil fremgå af det efterfølgende, så er det med denne metode kun muligt, at beregne konkrete  $y$ - og  $Q$ -værdier på disse funktioner i forudvalgte punkter. Disse punkter vil vi placere på en overskuelig og EDB-venlig måde i  $xt$ -planen - jf. nedenstående figur 4.



Som det fremgår af denne figur, placerer vi i  $xt$ -planen en lang række beregningspunkter, hvis konstante indbyrdes afstand i  $x$ -aksens retning er  $\Delta x$ , medens den i  $t$ -aksens retning er  $\Delta t$ .

På denne måde svarer  $i = 0$  til den øvre grænse på den betragtede vandløbstrækning, også kaldet *øvre rand*; tilsvarende svarer *nedre rand* på vandløbstrækningen til  $i = N_i$ . Som vi senere skal se, er vi ift. til begge disse rande nødt til på forhånd at vide, hvorledes de 2 ubekendte varierer med tiden.

Disse såkaldte *rand-* og *startbetingelser* vil reelt i en konkret situation være bestemmende

for hvilken numerisk løsning, ligningerne (15) og (16) har.

Det næste skridt består nu i, at vi bestemmer os for at arbejde med en speciel finite-differensmetode, hvor hver anden  $i$ -linie er en  $Q$ -linie, medens de mellemliggende linier er  $y$ -linier. Er således øvre rand en såkaldt  $Q$ -rand bliver altså alle knudepunkterne der ligger på linierne  $i = 0, 2, 4, \dots, N_i-1$ , knudepunkter, hvor vi kun vil beregne  $Q$ . Omvendt bliver knudepunkter, der ligger på linierne,  $i = 1, 3, 5, \dots, N_i$ , altså knudepunkter, hvor vi kun vil beregne  $y$ . Nedre rand bliver altså på denne måde en  $y$ -rand, og  $N_i$  dermed et ulige tal. At nedre rand er en  $y$ -rand er et bevidst valg, da erfaringen har vist, at det som hovedregel er en ulempe – og i nogle tilfælde direkte ufornuftigt – at arbejde med samme parameter ( $Q$  eller  $y$ ) på begge rande samtidigt.

Vi forestiller os nu, at den numeriske beregning af  $Q$  og  $y$  er startet med – ud fra kendte værdier af samme parametre i knudepunkterne svarende til tiden  $t = 0$  – at værdierne i knudepunkterne svarende til tidslinien  $n = 1$  er blevet beregnet, og at beregningen herfra er fortsat, såledesat  $Q$  og  $y$  i knudepunkterne på tidslinien  $n$  er kendte. Vi står altså over for at skulle foretage en tilsvarende beregning på tidslinien  $n+1$ .

Hvorledes dette sker, vil vi beskrive ved at betragte forholdene omkring knudepunkterne, der ligger mellem henholdsvis  $i-1$ - og  $i+2$ -linierne og  $n$ - og  $n+1$ -linierne. Blandt disse er  $i$ -linien en  $y$ -linie, jf. figur 4.

### 3.1 Kontinuitetsligningen

Leddene i denne ligning vil vi approksimere på følgende måde:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} \approx \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2 \cdot \Delta x} + \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta x} \right) \quad (17a)$$

$$b \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx b_i^{n+1/2} \cdot \left( \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} \right) = \frac{(b_i^n + b_i^{n+1})}{2} \cdot \left( \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} \right) \quad (17b)$$

$$q \approx \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left( \frac{q_i^n + q_i^{n+1}}{2} \cdot \Delta x + \frac{q_{i+1}^n + q_{i+1}^{n+1}}{2} \cdot \Delta x \right) \quad (17c)$$

Selve fremgangsmåden vil vi forklare ved at se nærmere på det første led, (17a). Når vi skal approksimere  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  tager vi vandføringen i punktet  $(x_{i+1}, t^{n+1})$  og fra denne fratrækker vi vandføringen i punktet  $(x_{i-1}, t^{n+1})$  og når denne vandføringsdifferens divideres med  $2 \cdot \Delta x$ , har vi dannet et approksimat på  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  på tidslinien  $n+1$ . Ved at gøre præcis det samme på  $n$ -tidslinien, og til sidst danne en tidslig middelværdi af disse 2 approksimationer, har vi dannet det endelige approksimationsudtryk for leddet  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . Den i princippet samme metode er fulgt ved approksimation af  $b \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$ , idet vi dog her har dannet  $\frac{\partial y}{\partial t}$  ved fra vanddybden i punktet  $(x_i, t^{n+1})$  at fratrække vanddybden i punktet  $(x_i, t^n)$ , for derefter at dividere denne vanddybdedifferens med  $\Delta t$  og endelig multiplicere med en tidslig middelværdi af vandspejlsbredden.



Med hensyn til  $q$  ses det, at vi har taget højde for, at indsvivningen dels kan være tidsvarierende, dels kan variere fra  $\Delta x$  til  $\Delta x$ . Vi har derfor også benyttet de introducerede indices på  $q$ -leddet.

Vi indsætter nu (17a), (17b) og (17c) i (15), hvorefter vi isolerer de ubekendte, dvs. alle led med tidsindekset  $n+1$ , på ligningens venstreside. Herved kan kontinuitetsligningen skrives på følgende form:

$$A1_i \cdot Q_{i-1}^{n+1} + B1_i \cdot y_i^{n+1} + C1_i \cdot Q_{i+1}^{n+1} = D1_i \quad (18)$$

hvor

$$A1_i = -\frac{\Delta t}{4 \cdot \Delta x}$$

$$B1_i = \frac{1}{2} \cdot (b_i^n + b_i^{n+1})$$

$$C1_i = -A1_i$$

$$D1_i = B1_i \cdot y_i^n + A1_i \cdot (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \frac{1}{4} \cdot (q_i^n + q_i^{n+1} + q_{i+1}^n + q_{i+1}^{n+1})$$

(18) ses at være lineær, hvad angår de ubekendte  $Q$  og  $y$ .

### 3.2 Impulsligningen

Vi vil nu anvende det ovenfor introducerede princip til at foretage en lignende såkaldt diskretisering af de enkelte led i impulsligningen:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} \quad (19a)$$

$$\frac{\Delta \left( \frac{Q^2}{A} \right)}{\Delta x} \approx \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left( \frac{Q_{i+2}^{n+1} \cdot Q_{i+2}^n}{A_{i+2}^{n+1/2}} - \frac{Q_i^{n+1} \cdot Q_i^n}{A_i^{n+1/2}} \right) \quad (19b)$$

$$g \cdot A \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx g \cdot A_{i+1}^{n+1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{y_{i+2}^{n+1} - y_i^{n+1}}{2 \cdot \Delta x} + \frac{y_{i+2}^n - y_i^n}{2 \cdot \Delta x} \right) \quad (19c)$$

$$g \cdot A \cdot I_0 \approx g \cdot A_{i+1}^{n+1/2} \cdot I_0 \quad (19d)$$

$$g \cdot A \cdot \frac{Q \cdot |Q|}{M^2 \cdot R^{4/3} \cdot A^2} = g \cdot A \cdot \frac{Q \cdot |Q|}{K^2} \approx g \cdot A_{i+1}^{n+1/2} \cdot \frac{Q_{i+1}^{n+1} \cdot Q_{i+1}^n}{(K^2)_{i+1}^{n+1/2}} \quad (19e)$$

Bemærk, at vi i (19b) og (19e) har undgået at introducere en ubekendt vandføring i potensen 2 ved at foretage diskretiseringen som vist. Endvidere har vi i (19e) af praktiske grunde indført  $K = M \cdot R^{2/3} \cdot A$ .

Vi indsætter nu (19a) - (19e) i (16), hvorefter impuls-ligningen kan skrives på følgende måde, når vi igen isolerer alle led med tidsindekset  $n+1$  på ligningens venstreside:

$$A\mathcal{Q}_{i+1} \cdot y_i^{n+1} + B\mathcal{Q}_{i+1} \cdot Q_{i+1}^{n+1} + C\mathcal{Q}_{i+1} \cdot y_{i+2}^{n+1} = D\mathcal{Q}_{i+1} \quad (20)$$

hvor

$$A\mathcal{Q}_{i+1} = -g \cdot A_{i+1}^{n+1/2} \cdot \frac{\Delta t}{4 \cdot \Delta x}$$

$$B\mathcal{Q}_{i+1} = 1.0 + A_{i+1}^{n+1/2} \cdot \frac{|Q_{i+1}^n|}{(K^2)_{i+1}^{n+1/2}} \cdot \Delta t$$

$$C\mathcal{Q}_{i+1} = -A\mathcal{Q}_{i+1}$$

$$D\mathcal{Q}_{i+1} = Q_{i+1}^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left( \frac{Q_{i+2}^{n+1} \cdot Q_{i+2}^n}{A_{i+2}^{n+1/2}} - \frac{Q_i^{n+1} \cdot Q_i^n}{A_i^{n+1/2}} \right) \\ - g \cdot A_{i+1}^{n+1/2} \cdot \frac{\Delta t}{4 \cdot \Delta x} \cdot (y_{i+1}^n - y_i^n) + g \cdot A_{i+1}^{n+1/2} \cdot \Delta t \cdot I_0$$

$$A^{n+1/2} = \frac{1}{2} \cdot (A^n + A^{n+1})$$

$$(K^2)^{n+1/2} = \left( \frac{1}{2} \cdot (K^n + K^{n+1}) \right)^2$$

Som det var tilfældet med (18), ses (20) at være lineær mht. de ubekendte  $Q$  og  $y$ .

### 3.3 Løsningsmetode

Ligningerne (18) og (20) er opstillet ved at betragte forholdene omkring knudepunkterne, der ligger mellem henholdsvis  $i-1$ - og  $i+2$ -linierne og  $n$ - og  $n+1$ -linierne. Mellem de samme  $n$ -linier kunne vi ligeså godt have betragtet forholdene omkring knudepunkterne beliggende mellem henholdsvis  $i+1$ - og  $i+4$ -linierne, osv. Når samtlige punkter mellem omtalte  $n$ -linier betragtes, opstår der på denne måde et system af  $N_i - 1$  lineære ligninger med  $N_i - 1$  ubekendte:

$$y_i^{n+1}, i = 1, 3, 5, \dots, N_i - 2, \text{ og } Q_i^{n+1}, i = 2, 4, 6, \dots, N_i - 1.$$

At antallet af ubekendte netop svarer til antallet af ligninger hænger sammen med, at randværdierne  $Q_0^{n+1}$  og  $y_{N_i}^{n+1}$  som tidligere omtalt forudsættes, at være kendte på forhånd. Det ses også, at hvis dette ikke var tilfældet ville antallet af ubekendte være  $N_i+1$ , medens ligningsantallet fortsat ville være  $N_i-1$  svarende til antallet af "interne" knudepunkter.

Nedenfor er de  $N_i-1$  ligninger opstillet i rækkefølge, startende med en diskretiseret kontinuitetsligning (KL), hvorefter der følger en diskretiseret impuls-ligning (IL), osv. Af hensyn til overskueligheden er indeks  $n+1$  ikke medtaget:

$$\begin{aligned}
 KL : \quad & B1_1 \cdot y_1 + C1_1 \cdot Q_2 = D1_1 - A1_1 \cdot Q_0 \\
 IL : \quad & A2_2 \cdot y_1 + B2_2 \cdot Q_2 + C2_2 \cdot y_3 = D2_2 \\
 KL : \quad & A1_3 \cdot Q_2 + B1_3 \cdot y_3 + C1_3 \cdot Q_4 = D1_3 \\
 IL : \quad & A2_4 \cdot y_3 + B2_4 \cdot Q_4 + C2_4 \cdot y_5 = D2_4 \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 KL : \quad & A1_{N_i-2} \cdot Q_{N_i-3} + B1_{N_i-2} \cdot y_{N_i-2} + C1_{N_i-2} \cdot Q_{N_i-1} = D1_{N_i-2} \\
 IL : \quad & A2_{N_i-1} \cdot y_{N_i-2} + B2_{N_i-1} \cdot Q_{N_i-1} = D2_{N_i-1} - C2_{N_i-1} \cdot y_{N_i}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Bemærk, at vi i såvel den første kontinuitetsligning som den sidste impuls-ligning har anbragt leddene med de kendte randværdier på ligningernes højre side.

Ovenstående ligningssystem kan løses vha. den såkaldte *Double Sweep Algoritme*. Denne går ud på, at vi i den første (kontinuitets-)ligning isolerer  $y_1$  på ligningens venstreside, hvilket i praksis vil sige, at vi udtrykker  $y_1$  ved  $Q_2$ . Dette udtryk for  $y_1$  indsætter vi i den næste (impuls-) ligning, der derved kun kommer til at indeholde  $Q_2$  og  $y_3$ . Udnyttes dette til at isolere  $Q_2$  på denne lignings venstreside, kan vi altså udtrykke  $Q_2$  ved  $y_3$ . Dette udtryk indsættes herefter i den følgende (kontinuitets-)ligning. På denne måde kan vi ved en fortsat substitution ned gennem ligningerne nå frem til ligningssystemets sidste (impuls-) ligning, der på denne måde kun kommer til at indeholde én ubekendt,  $Q_{N_i-1}$ , der derfor kan beregnes. Ved nu at "sweepe" tilbage gennem ligningerne ved at indsætte den nyligt beregnede  $Q$ -værdi i den næstsidste ligning, kan vi her beregne  $y_{N_i-2}$ . På denne måde fortsættes op igennem ligningerne, indtil vi når tilbage til den første (kontinuitets-) ligning i ligningssystemet, hvor hele beregningsprocessen afsluttes med, at  $y_1$  beregnes.

I tilknytning til denne løsningsmetode skal vi kort beskæftige os med et mindre problem. Betragter vi f.eks. koefficienten  $B1$  i (18), så ser vi, at denne indeholder vandspejlsbredden  $b^{n+1}$ , der af gode grunde er ubekendt på det tidspunkt, hvor ligningssystemet (21) skal løses, da en forudsætning for at  $b^{n+1}$  kan beregnes er, at vanddybden  $y^{n+1}$  er kendt. Det samme problem har vi ifm. samtlige koefficienter i (18), idet såvel  $A2$ ,  $B2$ ,  $C2$  og  $D2$  ses at

indeholde værdier af diverse tværsnitsparametre på tidstrin  $n+1$ . Ved et nøjere studium af disse koefficienter opdager man endnu et problem, da disse ses at indeholde  $Q$ - og  $y$ -værdier på  $i$ -linier, der oprindeligt ikke er hverken  $Q$ - eller  $y$ -linier, jf. introduktionen af det numeriske beregningsnet, figur 4. Disse problemer er dog ikke større, end at de kan klares vha. den nedenfor skitserede løsningsmetode:

1. Efter afsluttet beregning på tidslinien  $n$ , beregnes  $Q$  på  $y$ -linierne og  $y$  på  $Q$ -linierne ved en passende interpolationsteknik (lineær eller parabolisk).
2. Ligningssystemet (21) løses herefter 1. gang vha. *Double Sweep Algoritmen*, idet en række parameterværdier – der indgår i koefficientberegningen med en værdi svarende til tidstrin  $n+1$  – værdisættes med deres respektive værdier på tidstrin  $n$ .
3. Interpolationsproceduren omtalt ovenfor gennemføres nu på tidstrin  $n+1$  på basis af det første løsningssæt til ligningssystemet (21).
4. Ligningssystemet (21) løses 2. (og sidste) gang, igen vha. *Double Sweep Algoritmen*.

Det er praktiske erfaringer, der har vist, at man opnår tilstrækkeligt præcise beregningsresultater, når man har indbygget 2 iterationstrin i denne løsningsmetode. Der er dog intet til hinder for, at metodens punkt 3 og 4 kan gentages mere end 2 gange, men man opnår altså ikke væsentlige forbedringer i beregningsnøjagtigheden af denne grund.

Ved at anvende denne løsningsmetode kan man successivt regne sig gennem alle de tidstrin, som man på forhånd har besluttet sig til at gennemregne ud fra et skøn over hvad der tidsmæssigt er dækkende ift. det pågældende hydrauliske problem. Hvis f.eks. problemet består i at få klarlagt, hvor stor den hydrauliske påvirkning er på et givet vandløbssystem, der er belastet af et eller flere regnbetingede udløb fra en nærliggende bys afløbssystem, må man starte med at skønne det samlede antal tidstrin,  $N_n$ , som skal gennemregnes. Retningsgivende i denne henseende vil være udløbshydrograferne tidsmæssige udstrækning sammenholdt med et skøn over den hydrauliske „transporttid“ mellem udløbene og et kritisk tværsnit nedstrøms disse. Skulle det vise sig, at man er kommet til at skønne  $N_n$  for lavt er skaden ikke større end, at man kan lade sin hydrodynamiske model gennemregne situationen endnu engang med en højere værdi af  $N_n$ .

### 3.4 Afslutning

Den approksimationsmetode, der er benyttet ved diskretiseringen af de enkelte led i kontinuitets- og impuls-ligningen, kaldes normalt under ét *Abbott-Ionescu-skemaet*. Både erfaringen, men også teoretiske undersøgelser, har vist, at dette skema med den ovenfor introducerede løsningsmetode præsterer numerisk stabile beregningsresultater, der er fri for numerisk diffusion. Ordet stabil hentyder i denne forbindelse til, at en lille forstyrrelse i beregningsresultatet på tidstrin  $n$  af skemaet ikke bliver forstørret i den videre beregning frem mod større og større tidstrin. Hvis et såkaldt finite-differens-skema indeholder numerisk diffusion vil virkningen være den, at f.eks. en vandføringsbølge, der forplanter sig ned gennem et vandløb eller en kanal vil blive dæmpet eller „udfladet“ hurtigere end det fysisk set er korrekt.

Med hensyn til præcisionen i skemaets beregningsresultater, så beror denne bla. på størrelsen af det steds- og tidsskridt ( $\Delta x$  og  $\Delta t$ ) man vælger at bruge. Uden at bevæge os for langt ind på dette emne, skal det nævnes, at disse skridtlængder ikke bør vælges større, end at følgende er opfyldt:

$$V \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot |V \pm \sqrt{g \cdot y_m}| < 10 - 15$$

Ny parameter i denne sammenhæng er  $y_m$ , der betegner middelvanddybden i tværsnittet. Apropos denne parameter så skal vandløbsgeometrien på forhånd være kendt via opmålte længde- og tværprofiler. Før igangsætningen af en hydrodynamisk beregning, er det normalt (f.eks. i *MIKE 11*) at disse geometridata forbehandles eller pre-processeres som det hedder på nudansk. Bl.a. oprettes der i hvert beregningsknudepunkt en såkaldt tværsnitstabel, der for et vist antal forudvalgte værdier af vanddybden (evt. vandspejlskoten) indeholder de tilsvarende sæt af de vanddybdeafhængige tværsnitsparametre ( $b$ ,  $A$  og  $R$ ), der indgår i koefficientberegningen ifm. både (18) og (20). Tværsnitstabellerne hørende til beregningsknudepunkterne bestemmes gennem en passende interpolation på langs af vandløbet mellem tværsnitstabellerne hørende til de opmålte tværsnit. Dette er nødvendigt, da der sjældent i opsætningen af data til en hydrodynamisk model er sammenfald mellem beregningsknudepunkternes og de opmålte tværsnits placering. Ofte er der flere punkter af førstnævnte type, men det modsatte kan i dag let være tilfældet, da amterne efterhånden har gennennført detailopmålinger i mange af landets amtsvandløb med det resultat, at tværsnitsopmålinger foreligger med en indbyrdes afstand på 50–100 m. Under en hydrodynamisk simulering benyttes beregningsknudepunkternes tværsnitstabeller til for givne/beregnete vanddybder at finde de hertil svarende værdier af de ovenfor nævnte vanddybdeafhængige tværsnitsparametre, der er nødvendige for at koefficientberegningen – og dermed hele den hydrodynamiske beregning – kan gennemføres.

Et andet forhold, der har stor betydning for præcisionen i beregningsresultaterne er den „detaljeringsgrad“, hvormed randbetingelserne,  $Q(0,t)$  og  $y(N_i,t)$ , og startbetingelserne,  $Q(x,0)$  og  $y(x,0)$ , beskrives. Hvad der hermed menes, kan nok bedst beskrives ved, at vi forestiller os, at vandføringen på øvre rand,  $Q(0,t)$ , er tidsvarierende svarende til, at en „vandføringsbølge“ gennem nogen tid passerer ind over øvre rand. En sådan bølge vil indgå i beregningen med de enkeltværdier på rand-tidsserien for  $Q(0,t)$ , der er i overensstemmelse med det valgte tidsskridts størrelse. Hvis dette er valgt – og iøvrigt opfylder ovenstående betingelser – så vil præcisionen i den numeriske beregning naturligvis ikke blive særlig god, hvis der f.eks. over tidsrummet fra  $t^n$  til  $t^{n+1}$  er en kraftig tidsmæssig variation på  $Q(0,t)$ . Sagt på en lidt anden måde, så skal vi ved valget af både  $\Delta x$  og  $\Delta t$  sikre os, at vi får en passende opløsning eller beskrivelse af variationerne på randbetingelsernes tidsserier og/eller startbetingelsernes længdeprofiler. En god huskeregel i denne forbindelse er, at kraftige variationer på disse tidsserier/længdeprofiler bør beskrives med mindst 10 helst 15 beregningspunkter.

Til sidst kan det oplyses, at *MIKE 11* fra Dansk Hydraulisk Institut også benytter det

her introducerede Abbott-Ionescu-skema ved den numeriske løsning af Saint Venant ligningerne.



## 4 Litteraturliste

Hvis de foreliggende noter skulle have givet læseren interesse for at fordybe sig i det teoretiske og/eller det numeriske grundlag for beregning af ikke-stationære strømninger i vandløb/kanaler, kan følgende litteratur anbefales:

Cunge, J. A., Holly, F. M. Jr. and Verwey, A.: *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman Advanced Publishing Programme, 1980.

Sjöberg, A.: *Beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag och dagvattensystem*. Chalmers Tekniska högskola, Institutionen för vattenbyggnad, Meddelande nr. 87, Göteborg, 1976.

Dansk Hydraulisk Institut: *MIKE 11, Documentation*, Okt. 1988. (Supplement til User's Guide for *MIKE 11*).

Dansk Hydraulisk Institut: *MOUSE, Dokumentation*, Marts 1989. (Indgår i brugervejledningen for *MOUSE*).



